UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE ECONOMIA

Teoria dos Jogos

nº 365

Larry Carris Cardoso
Orientação: Maurício M. Moreira

Textos para Discussão

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE ECONOMIA

SÉRIE TEXTOS PARA DISCUSSÃO - Nº 365

TEORIA DOS JOGOS

LARRY CARRIS CARDOSO
ORIENTAÇÃO: MAURÍCIO M. MOREIRA

Diretor Geral: Prof. Carlos Lessa
Diretor Adj. de Graduação: Prof. René Louis de Carvalho
Diretor Adj. de Pós-graduação: Prof. Carlos A. de Medeiros
Diretor Adj. de Pesquisa: Prof. José E. Cassiolato
Diretor Adj. Administrativo: Prof. Adilson de Oliveira
Coordenador de Publicações: Prof. David Kupfer
Projeto gráfico: Gláucia Aguiar
Editoração: Jorge Amaro
Ana Lucia Ribeiro
Revisão: Paola Lobo Brollo
Secretária: Joseane de O. Cunha
Impressão: Célio de Almeida Mentor
Olávio da Silva Inacio

Ficha catalográfica

CARDOSO, Larry Carris.

Teoria dos Jogos. / Larry Carrys Cardoso. -- Rio de Janeiro: UFRJ/IE, 1996

41p; 21cm -- (Textos para Discussão. IE/UFRJ; nº 365)

Bibliografia: p.32-33

1. Teoria dos Jogos. 2. Microeconomia. I. Título. II. Série.

O Programa Editorial do IE/UFRJ (sucessor dos Programas Editoriais do IEI e da FEA/UFRJ), através das séries ***"TEXTOS PARA DISCUSSÃO"***, ***"TEXTOS DIDÁTICOS"*** e ***"DOCUMENTOS"***, publica artigos, ensaios, material de apoio aos cursos de graduação e pós-graduação e resultados de pesquisas produzidos por seu corpo docente.

Essas publicações, assim como mais informações, encontram-se disponíveis na livraria do Instituto de Economia, Av. Pasteur, 250 sala 4 (1º andar) - Praia Vermelha - CEP: 22290-240 / C.P. 56028. - Telefone: 295-1447, ramal 224; - Fax 541-8148, A/c Sra. Joseane de O. Cunha.

Índice

Apresentação

O presente texto de Larry Cardoso, aluno de graduação desta escola, representa um importante esforço no sentido de dar aos professores e alunos da casa mais um instrumento didático que contribua para o aperfeiçoamento do ensino de economia, particularmente de microeconomia, no nosso Instituto. A importância do assunto do texto é difícil de se subestimar. Teoria dos Jogos se transformou no instrumental dominante para a análise de estruturas de mercado oligopólicas, em que predominam situações de interação estratégica. Este instrumento se mostrou especialmente adequado para contextos dinâmicos e que envolvam assimetria de informações.

O objetivo do texto, como já sugerido, não foi de oferecer uma nova contribuição para o assunto, mas sim procurar sistematizá-lo de forma a facilitar a iniciação de alunos de graduação no tema. Para tanto, Larry procurou resenhar, sob minha orientação, alguns dos manuais de microeconomia mais utilizados nas melhores escolas de economia em nível internacional, contando com a ajuda de um texto sobre Teoria dos Jogos de um dos professores da casa, Otávio Façanha. Ao longo desta tarefa, fez também o esforço de ilustrar os conceitos com exemplos práticos.

O resultado final foi satisfatório e o exercício já se mostrou eficaz pelo menos como forma de aprofundar o conhecimento dos alunos de graduação com relação a um tema específico - no caso, o de Larry com relação à Teoria dos Jogos. Tenho certeza de que o texto se mostrará útil e eficaz também como instrumento didático nos cursos de graduação.

Rio, maio de 1996.

Maurício M. Moreira.

INTRODUÇÃO

Este texto tem o objetivo de contribuir para o aprendizado inicial de Teoria dos Jogos, e está dividido em quatro partes.

A primeira visa mostrar como são representados os jogos na forma extensiva e na forma normal. Na segunda, parte que toma o maior espaço deste trabalho, mostram-se alguns modelos de solução de jogos: fala-se de eliminação de estratégias dominadas, Equilíbrio de Nash, Indução Retroativa, e há uma brevíssima menção sobre estratégias mistas. Dentro do Equilíbrio de Nash, são mencionados o Modelo de Cournot, o Modelo de Bertrand, a noção de Múltiplos Equilíbrios e o Equilíbrio de Bayes-Nash. Na seção de Indução Retroativa, fala-se do Modelo de Stackelberg, do Equilíbrio de Nash perfeito em sub-jogos e do Equilíbrio de Bayes-Nash perfeito em sub-jogos.

Na terceira parte, é feita uma pequena introdução a jogos repetidos; finalmente na quarta, é apresentada a bibliografia em que foi fortemente baseado o trabalho.

A Teoria dos Jogos é o estudo da tomada de decisões. Um agente decide o que fazer levando em consideração as atitudes dos demais agentes relevantes.

Os jogos podem ser divididos em:

· Estáticos: Todos os fatos relevantes acontecem ao mesmo tempo.

· Dinâmicos: Leva em consideração a ordem em que os fatos acontecem.

Além de serem divididos em estáticos e dinâmicos, os jogos podem ser discretos ou contínuos. Os jogos discretos são jogos como dados, jogo da velha, par ou ímpar, etc. Enquanto os jogos contínuos são jogos como decisões de produção e outros. Nestes, o conjunto das decisões que os agentes podem tomar é infinito.

A Teoria dos Jogos supõe que todos os agentes sejam racionais, no sentido de que maximizam seus rendimentos ("payoffs"). Algumas vezes, a racionalidade exigida dos agentes é tão grande, que faz com que a teoria se distancie por demais do mundo real.

Além da grande racionalidade exigida, a Teoria dos Jogos tem um outro grande defeito, que é não levar em consideração a incerteza. Pois, na presença de incerteza, é muita vezes impossível representar e resolver os jogos.

Conhecidas as limitações da Teoria dos Jogos, é necessário dizer que ela pode ser muito útil na representação da concorrência oligopolista, no desenvolvimento da Teoria dos Contratos, na organização do raciocínio, na organização industrial e etc.

1. REPRESENTAÇÃO DE FORMAS ESTRATÉGICAS

Existem duas formas principais de se representar jogos: a extensiva e a normal. A forma extensiva é uma forma dinâmica, enquanto a forma normal é uma forma estática. A forma normal, apesar de ser estática, é muito útil, pois algumas soluções, como o equilíbrio de Nash, são mais facilmente vislumbradas desta maneira.

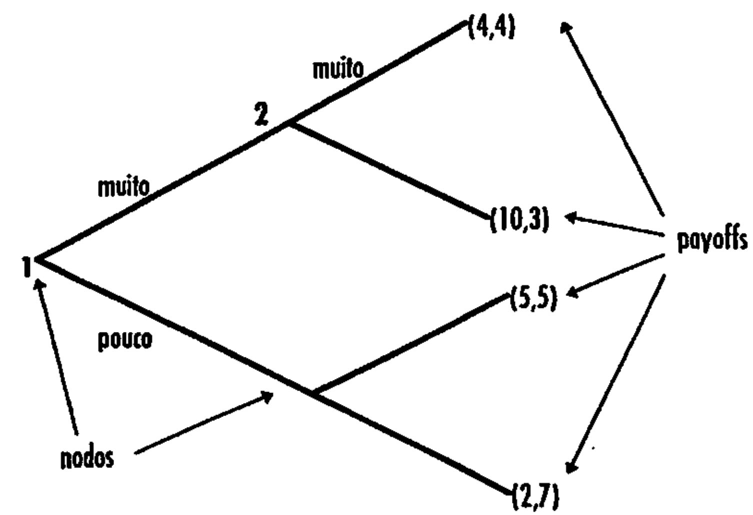
A. EXTENSIVA

Suponhamos que existam duas firmas (1 e 2). Elas tomam decisão sobre investir muito ou pouco em P&D.

Ambos os agentes sabem o que aconteceu antes de tomarem suas decisões.

- Se a firma 1 investir muito e a 2 investir pouco, a 1 ganha 10 e a 2 ganha 3.
- Se a firma 1 investir pouco e a 2 investir muito, ambas ganham 5.
- Se ambas investirem pouco, a 1 ganha 2 e a 2 ganha 7.
- Se ambas investirem muito, ambas ganham 4.
- A firma um toma a decisão antes da firma dois.

O jogo na forma extensiva seria representado como:



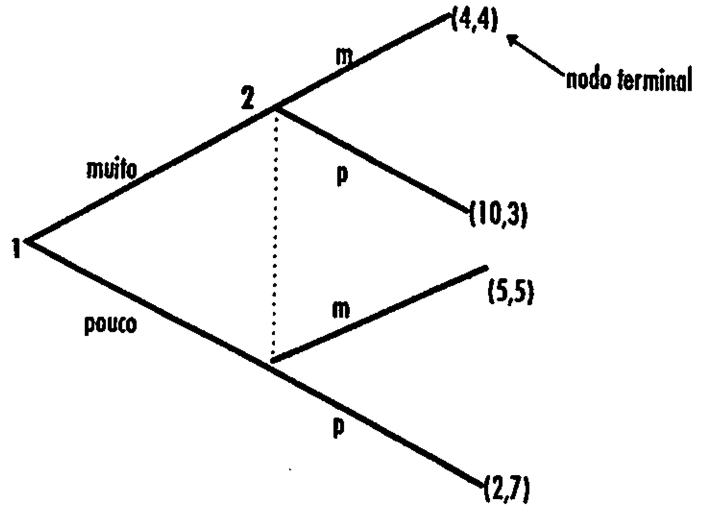
Payoffs é quanto as firmas ganham, que é representado pelo par (x,y) sendo x o payoff da firma 1 e y o payoff da firma 2.

Os nodos são os pontos onde são tomadas as decisões e os ramos são os caminhos pelos quais o jogo pode seguir.

Este é um jogo de informação completa e perfeita. Completa porque todos os agentes conhecem o jogo e perfeita porque os jogadores sabem qual caminho o jogo seguiu até eles tomarem suas decisões.

Se a firma 2 fosse tomar a sua decisão, sem saber a atitude tomada pela firma 1, o jogo seria de informação completa e imperfeita. Imperfeita porque a firma 2 toma a sua decisão sem saber o que a firma 1 já fez.

O jogo seria representado como:



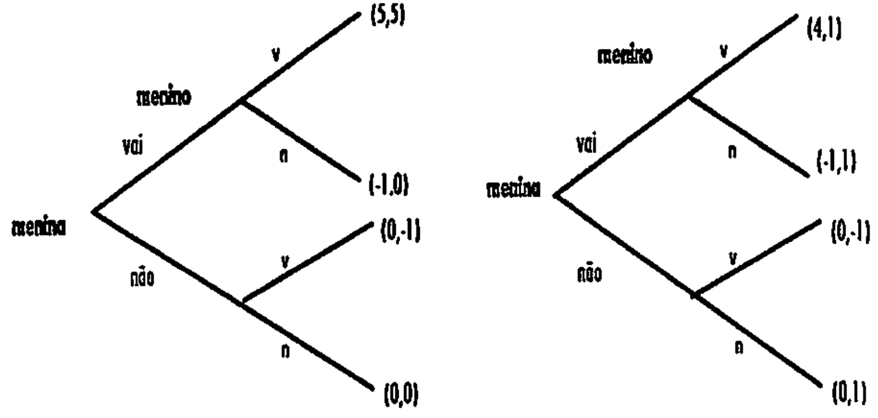
A linha pontilhada significa que a firma 2 não sabe se está no nodo de cima ou no nodo de baixo. Os pontos onde o jogo pode terminar são chamados de nodos terminais.

Existem ainda jogos de informação incompleta, ou seja, pelo menos um dos agentes não sabe exatamente que jogo esta jogando.

<u>Por exemplo:</u>

Um menino e uma menina decidem se vão a um encontro. O menino não conhece a menina e não sabe se vai

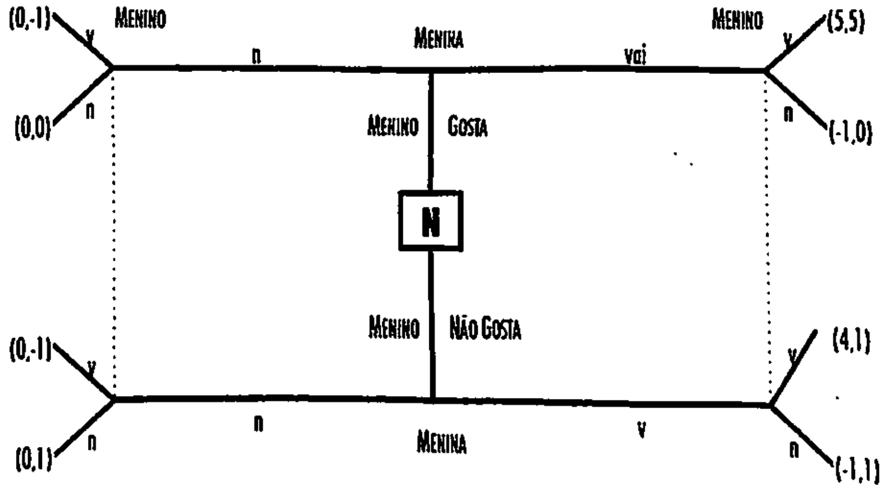
gostar dela ou não. Quem toma a decisão primeiro é a menina.



MENINO GOSTA MENINO NÃO GOSTA

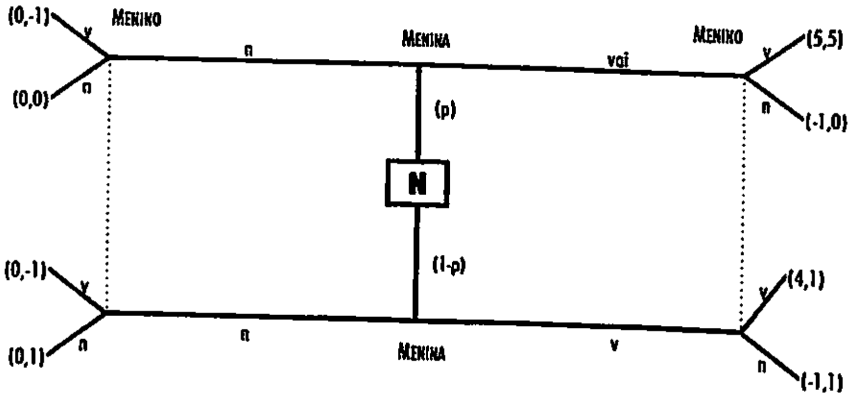
A menina sabe se o menino vai gostar dela ou não e portanto sabe qual dos dois jogos está jogando; enquanto o menino não sabe qual dos dois jogos está jogando, portanto este é um jogo de informação incompleta.

Este jogo ainda pode ser representado da seguinte forma:

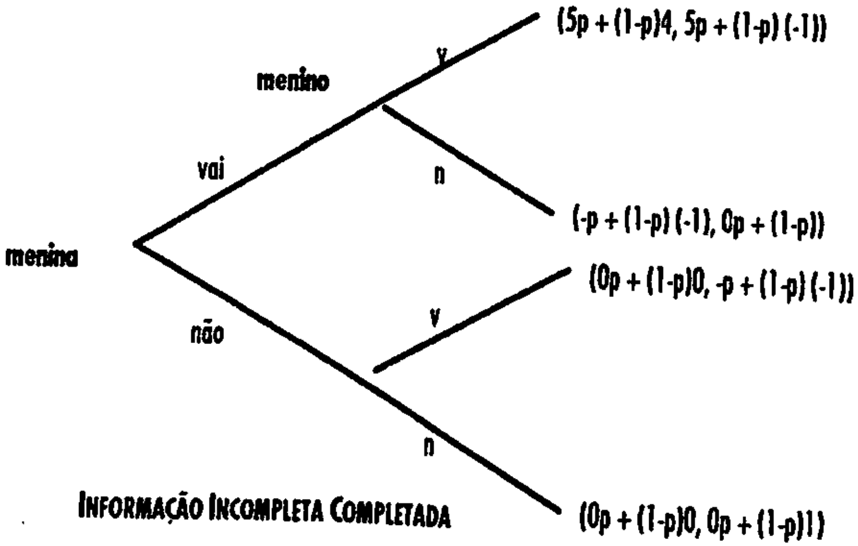


. O símbolo N representa a natureza, que, por convenção, determina se o menino gosta ou não da menina.

Se o menino soubesse que existe probabilidade p dele gostar da menina e (1-p) de não gostar e conhecesse o p, este jogo de informação incompleta se torna um jogo de informação completa e imperfeita (informação incompleta completada).



Este jogo também pode ser representado como:



Informação Incompleta Completada

B. Normal

Consideremos o exemplo acima em que duas firmas decidem sobre investimentos em P&D, na versão em que temos informação completa e imperfeita, ambas as firmas, quando tomam suas decisões, não sabem a decisão tomada pela outra firma. Este jogo seria representado por:

		2	
		muito	pouco
1	muito	4,4	10,3
	pouco	5,5	2,7

As linhas representam as decisões da firma 1 e as colunas as decisões da firma 2. Em cada quadrado, o primeiro número representa o payoff da firma 1 e o segundo o payoff da firma 2.

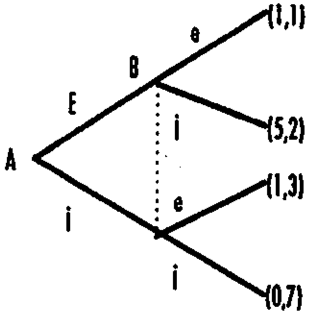
Se considerarmos a versão de informação completa e perfeita, o jogo seria representado por:

		2			
		mm	mp	pm	pp
1	m	4,4	10,3	4,4	10,3
	p	5,5	2,7	5,5	2,7

Decisões da firma 2

A novidade agora é que as decisões da firma 2 são representadas por dois símbolos; o primeiro representa a decisão que a firma 2 viu a firma 1 tomar, e o segundo representa a decisão da firma 2. Portanto, por exemplo, o par pm significa que a firma 2 viu a firma 1 investir pouco e por isso investirá muito. Os pares de jogadas que estão destacados por um círculo não são factíveis, já que o jogador 1 joga primeiro e o jogador 2 vê o que foi jogado pelo jogador 1; assim, o jogador 2 não pode se enganar.

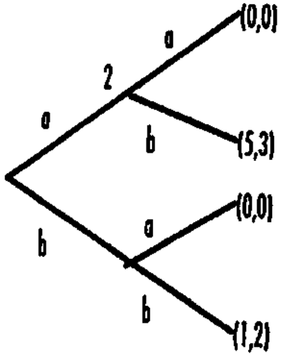
Um outro jogo que na forma extensiva fosse representado por:



na forma normal seria:

		B	
		e	i
A	E	(1,1)	(5,2)
	J	(1,3)	(0,7)

Outro jogo que fosse:



na torma normal seria:

		2			
		aa	ab	ba	bb
1	a	0,0	5,3	0,0	5,3
	b	0,0	1,2	0,0	1,2

<u>Exemplos</u>

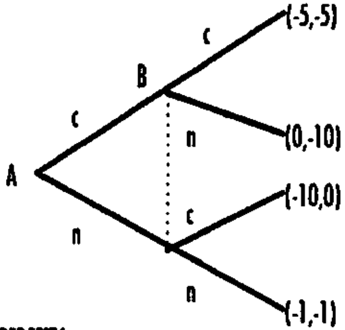
1) Um jogo conhecido como o dilema dos prisioneiros é um jogo no qual dois prisioneiros decidem se confessam ou não um crime que cometem conjuntamente. Os prisioneiros não sabem se o outro confessou ou não. Se ambos confessarem, eles pegam 5 anos de prisão, se ambos não confessarem, eles pegam um ano de prisão e se um confessar e o outro não, o que confessou é solto e o outro pega 10 anos de prisão.

Sendo A e B os prisioneiros, o jogo na forma normal seria:

c = confessa e n = não confessa

		B	
		c	n
A	c	(-5,-5)	(0,-10)
	n	(-10,0)	(-1,-1)

na forma extensiva seria:



INFORMAÇÃO COMPLETA E IMPERFEITA

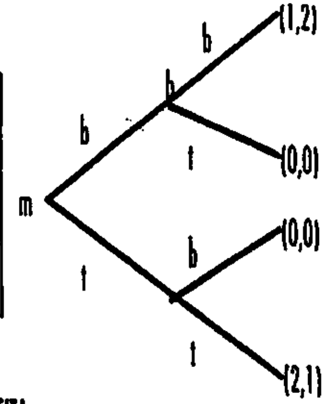
2) Uma mulher decide se vai ao teatro ou ao basquete e posteriormente seu marido também decide se vai ao teatro ou ao basquete.

· Se ambos forem ao basquete, o homem tem payoff 2 e a mulher payoff 1.

· Se ambos forem ao teatro, a mulher tem payoff 2 e o homem payoff 1.

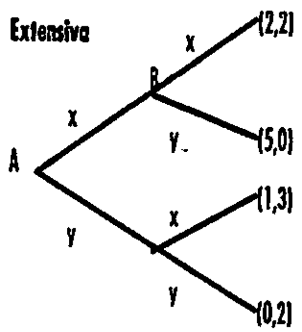
· Se eles forem em lugares diferentes, ambos têm payoff 0.

		h			
		bb	bt	tb	tt
m	b	1,2	0,0	1,2	0,0
	t	0,0	2,1	0,0	2,1



INFORMAÇÃO COMPLETA E PERFEITA

3) Duas firmas, A e B, decidem se investem muito (x) ou pouco (y) em tecnologia; A decide primeiro.

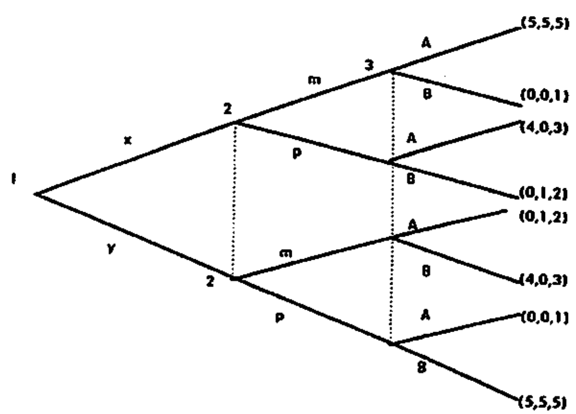


Normal

		B: xx	xy	yx	yy
A	x	2,2	5,0	2,2	5,0
	y	1,3	0,2	1,3	0,2

Informação Completa e Perfeita

4) A empresa 1 decide se produz coca (x) ou pepsi (y); depois, a distribuidora 2 decide se comercializa com coca (m) ou pepsi (p) e o consumidor 3 decide se toma coca (A) ou pepsi (B).



Informação Completa e Imperfeita

		2: m	p
1	x	(5,5,5)	(4,0,3)
	y	(0,1,2)	(0,0,1)

A

		2: m	p
1	x	(0,0,1)	(0,1,2)
	y	(4,0,3)	(5,5,5)

B

3

2. Soluções De Jogos (onde o jogo termina)

a. Eliminação de Estratégias Dominadas

É uma tática usada para a solução de jogos na forma normal, com informação completa (perfeita e imperfeita).

Caso o jogo esteja na forma extensiva, basta transformá-lo para a forma normal.

		2: a	b
1	A	x, y	k, w
	B	p, z	h, j

Para o jogador 1, a estratégia A será dominante em relação à estratégia B se ($x > p$ e $k \geq h$) ou ($x \geq p$ e $k > h$). Caso uma desta relações se verifique, a estratégia B é dominada pela estratégia A e, portanto, o jogador 1 nunca jogará a estratégia B.

Do mesmo modo, se ($p \geq x$ e $h > k$) ou ($p > x$ e $h \geq k$), a estratégia B é dominante e a estratégia A é dominada.

Para o jogador 2, se ($y \geq w$ e $z > j$) ou ($y > w$ e $z \geq y$), a estratégia a é dominante em relação à estratégia b que é dominada.

Já se ($y < w$ e $z \leq j$) ou ($y \leq w$ e $z < j$), a estratégia b é dominante e a estratégia a é dominada.

<u>Ex: 1)</u> (informação completa e imperfeita)

		2: a	b
1	A	2,5	1,7
	B	1,7	0,4

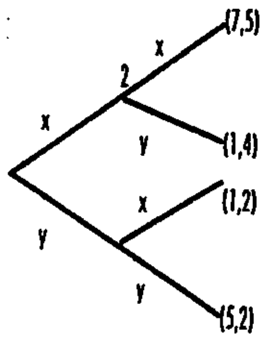
Olhando em relação ao jogador 1, como 2 >1 e 1 ≥ 0, a estratégia B é dominada pela estratégia A. Assim, o jogador 1, nunca jogará a estratégia B e o jogo pode ser encarado como:

		a	b
1	A	x,y	k,w

(2 = colunas)

Como o jogador 2 sabe que o jogador 1 escolhe A, o jogador 2 escolhe entre ganhar 5 e ganhar 7, e, como é racional, escolhe 7. Assim, o resultado do jogo será o par (A,b).

Ex: 2)



⇒

1 \ 2	xx	xy	yx	yy
x	7,5	1,4	7,5	1,4
y	1,2	5,2	1,2	5,2

Neste caso, para o jogador 1, 7 > 1 e 1 < 5, portanto, não existe estratégia dominada e estratégia dominante.

Para o jogador 2, 5>4 e 2 ≥ 2, portanto a estratégia x é dominante e a estratégia y é dominada.

1 \ 2	xx	yx
x	2,5	1,7
y	1,7	0,4

Assim, o jogador 1 simplesmente escolhe entre ganhar 7 ou ganhar 1, como escolherá 7, jogará x. Portanto, ambos os jogadores jogarão x. Com isso, o par de payoffs que resultará do jogo será (7,5).

Ex: 3) **Dilema do Prisioneiro**

A \ B	c	n
c	-5,-5	0,-10
n	-10,0	-1,-1

Para A, -5 > -10 e 0 > -1, assim joga c.

Para B, -5 > -10 e 0 > -1, assim também joga c.

Portanto, o resultado do jogo só pode ser o par (c,c), em que ambos ficam 5 anos presos.

Ex: 4)

1 \ 2	x	y
A	1,2	5,1
B	4,1	3,3

Para 1, 1 < 4 e 5 > 3, portanto, não possui estratégia dominada.

Para 2, 2 > 1 e 1 < 3, portanto, também não possui estratégia dominada.

Assim, este jogo não pode ser resolvido por eliminação de estratégias dominadas.

B. EQUILÍBRIO DE NASH

Assim como a eliminação de estratégias dominadas, o Equilíbrio de Nash é uma solução para jogos na forma normal e com informação completa. Toda solução encontrada por eliminação de estratégias dominadas é um Equilíbrio de Nash, mas a recíproca não é verdadeira. Podemos dizer que o conjunto das soluções encontradas pelo Equilíbrio de Nash contêm o conjunto das soluções encontradas por eliminação de estratégias dominadas.

Uma determinada solução é um Equilíbrio de Nash se a escolha de cada jogador é ótima; dadas as escolhas dos demais.

		2: a	2: b
1	A	x,y	z,k
	B	p,j	w,u

Por exemplo, a estratégia (A,b) seria um equilíbrio de Nash se: dado que 1 escolhe A, 2 prefere b à a; e dado que 2 escolhe b, 1 prefere A à B. Portanto, um Equilíbrio de Nash seria a melhor resposta de cada jogador, dadas as escolhas dos demais.

<u>Ex. 1:</u>

		2: a	2: b
1	A	1,2	3,4
	B	5,6	7,8

Dado que 1 escolhe A, 2 escolhe b (porque 4 > 2). Fazemos então um traço embaixo deste 4.

		2: a	2: b
1	A	1,2	3,$\underline{4}$
	B	5,6	7,8

Dado que 1 escolhe B, 2 escolhe b (8 > 6). Traço embaixo do 8.

Dado que 2 escolhe a, 1 escolhe B (5 > 1). Traço embaixo do 5.

Dado que 2 escolhe b, 1 escolhe B (7 > 3). Traço embaixo do 7.

		2: a	2: b
1	A	1,2	3,$\underline{4}$
	B	$\underline{5}$,6	$\underline{7}$,$\underline{8}$

Todo par de payoffs que tiver dois traços será um equilíbrio de Nash. Pois será a melhor resposta de 1, dada a escolha de 2, e a melhor resposta de 2, dada a escolha de 1.

Assim, a solução seria o par (B,b).

<u>Ex.2:</u>

		B: c	B: n
A	c	0,0	2,5
	n	5,2	1,1

Dado que A escolhe c, B escolhe n.

Dado que A escolhe n, B escolhe c.

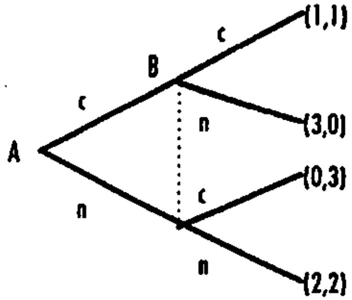
Dado que B escolhe c, A escolhe n.

Dado que B escolhe n, A escolhe c.

A \ B	c	n
c	0,0	2,5
n	5,2	1,1

Assim, este jogo possui dois equilíbrios de Nash: (c ,n) e (n,c).

Ex.3: Dilema do Prisioneiro.



$\longrightarrow$

A \ B	c	n
c	1,1	3,0
n	0,3	2,2

Se A escolhe c, B escolhe c.

Se A escolhe n, B escolhe c.

Se B escolhe c, A escolhe c.

Se B escolhe n, A escolhe c.

Equilíbrio de Nash igual a (c,c).

Ex.4:

1 \ 2	A	B
x	1,2	2,1
y	3,4	1,5

$\longrightarrow$

1 \ 2	A	B
x	1,2	2,1
y	3,4	1,5

Não possui Equilíbrio de Nash.

O conceito de Equilíbrio de Nash (melhores respostas) também pode ser usado para resolver jogos na forma contínua:

B.1 MODELO DE COURNOT

Suponha que existam duas firmas em um mercado e que elas estejam concorrendo em quantidades. O preço seja dado por: $p=10-q_1-q_2$. Ambas as firmas têm custo unitário de c.

Sendo: $q_1=$ quantidade produzida pela firma 1.

$q_2=$ quantidade produzida pela firma 2.

Assim, o lucro das firmas seria:

$L_1 = p.q_1.q_1.c = (p-c)q_1 = (10-q_1-q_2-c)q_1$

$L_2 = p.q_2.q_2.c = (p-c)q_2 = (10-q_1-q_2-c)q_2$

Cada firma considera a quantidade da outra como dada.

$L_1 = 10q_1-q_1^2-q_2q_1-cq_1$

$L_2 = 10q_2-q_2^2-q_2q_1-cq_2$

Como as firmas maximizam lucros.

$\frac{dL_1}{dq_1} = 0 \rightarrow \quad 10-2q_1-q_2-c = 0$

$2q_1 = 10-q_2-c$

$q_1 = \frac{10-q_2-c}{2} \leftarrow$ curva de reação da firma 1

$\frac{dL_2}{dq_2} = 0 \quad 10-2q_2-q_1-c = 0$

$q_2 = \frac{10-q_1-c}{2} \leftarrow$ curva de reação da firma 2

Resolvendo-se o sistema formado pelas duas curvas de reação, obteremos as quantidades produzidas por ambas as firmas. Esse ponto é chamado de Equilíbrio de Cournot-Nash.

Ex: $p = 100\text{-}2q_1\text{-}q_2$

$c_1 = 5$

$c_2 = 2$

$L_1 = p.q_1\text{-}5.q_1$

$L_2 = p.q_2\text{-}2.q_2$

$L_1 = 100q_1\text{-}2q_1^2\text{-}q_2q_1\text{-}5.q_1$

$L_2 = 100q_2\text{-}q_2^2\text{-}2q_2q_1\text{-}2.q_1$

$\frac{dL_1}{dq_1} = 100\text{-}4q_1\text{-}q_2\text{-}5 = 0$ (2)

$\frac{dL_2}{dq_2} = 100\text{-}2q_1\text{-}2q_2\text{-}2 = 0$ (1)

$q_2 = 100\text{-}4q_1\text{-}5$ (2)

(2) em (1) => $100\text{-}2q_1\text{-}2(100\text{-}4q_1\text{-}5)\text{-}2 = 0$

$6q_1\text{-}100+8 = 0$

$6q_1 = 92$

$q_1 = \frac{92}{6} = 15$

$q_2 = 100\text{-}4.15{,}33\text{-}5$

$q_2 = 100\text{-}61{,}33\text{-}5 = 33{,}67$

Assim, o Equilíbrio de Cournot-Nash é: $q_1 = 15{,}33$ e $q_2 = 33{,}67$

B.2 MODELO DE BERTRAND

No modelo de Bertrand as firmas concorrem em preços, ou seja, elas fixam o preço e deixam que o mercado determine a quantidade a ser vendida.

Neste caso, seria vantajoso para cada firma fixar o seu preço um pouco abaixo do preço das demais firmas. Assim ocorreria a chamada competição de Bertrand em que uma firma A fixaria seu preço abaixo das demais, em seguida outra firma fixaria abaixo do preço da firma A e assim sucessivamente, o limite seria quando todas as firmas fixarem preços igual ao custo. Com isso seria obtido o mesmo resultado do modelo de concorrência perfeita em um modelo de oligopólio.

A questão é que, com poucas firmas, haveria um incentivo para se realizar uma coalizão fixando um preço mínimo e mantendo os lucros.

B.3 MÚLTIPLOS EQUILÍBRIOS

Um dos "problemas" do Equilíbrio de Nash é a possibilidade de serem encontrados vários equilíbrios para um mesmo jogo, assim não seria possível identificar, ex-ante, em qual desses equilíbrios o jogo terminaria.

Ex:

		2	
		x	y
1	A	2,2	1,0
	B	0,1	2,2

Este jogo teria dois equilíbrios de Nash ((A,x) e (B,y)) e seria impossível afirmar qual dos dois será atingido.

B.4 EQUILÍBRIO DE BAYES-NASH

Considerando-se um jogo de informação incompleta em que os jogadores não saibam qual dos dois jogos abaixo estão jogando:

1 \ 2	u	j
w	1,2	7,2
k	4,1	3,2

jogo A

ou

1 \ 2	u	j
w	2,2	1,3
k	3,1	2,2

jogo B

Se completarmos a informação dizendo que existe 70% de chance de o jogo ser o A e 30% de o jogo ser o B, este jogo passaria a ser de informação incompleta completada.

Sendo representado por:

1 \ 2	u	j
w	0,7(1)+0,3(2); 0,7(2)+0,3(2)	0,7(7)+0,3(1); 0,7(2)+0,3(3)
k	0,7(4)+0,3(3); 0,7(1)+0,3(1)	0,7(3)+0,3(2); 0,7(2)+0,3(2)

1 \ 2	u	j
w	1,3 ; 2	5,2 ; 2,3
k	3,7 ; 1	2,7 ; 2

Aplicando a este jogo o conceito de equilíbrio de Nash, achamos o equilíbrio (w,j). Este equilíbrio é chamado de Equilíbrio de Bayes-Nash, porque reúne probabilidade (Bayes) e Equilíbrio de Nash.

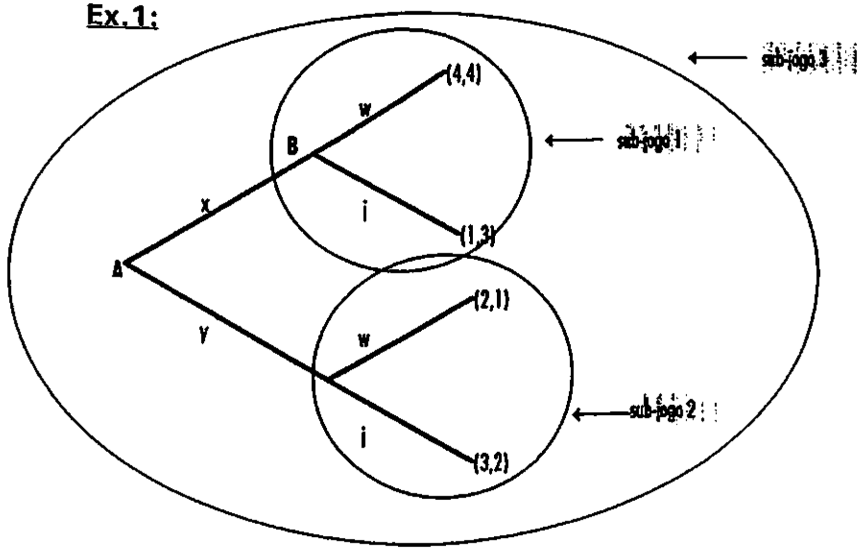
C. INDUÇÃO RETROATIVA

A indução retroativa é usada para resolver jogos de informação completa e perfeita na forma extensiva.

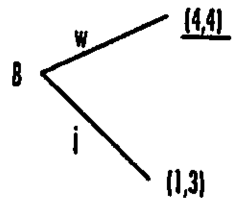
O jogador que joga primeiro antecipa a atitude do jogador que joga depois, e baseado nisso toma a sua decisão. Neste caso, o jogador que atua primeiro é chamado de líder, porque ele é quem decide o resultado do jogo, pois, quando toma sua decisão, já estão determinadas todas as demais jogadas dos outros jogadores.

Para antecipar as atitudes dos outros jogadores, o líder divide o jogo em sub-jogos e resolve cada sub-jogo separadamente.

Ex.1:

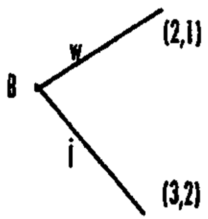


Sub-jogo 1:



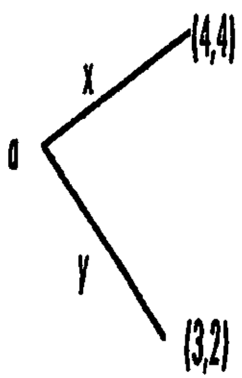
B escolhe entre ganhar 4 ou 3, joga w para ganhar 4.

Sub-jogo 2:



B escolhe entre ganhar 1 ou 2, portanto joga j para ganhar 2.

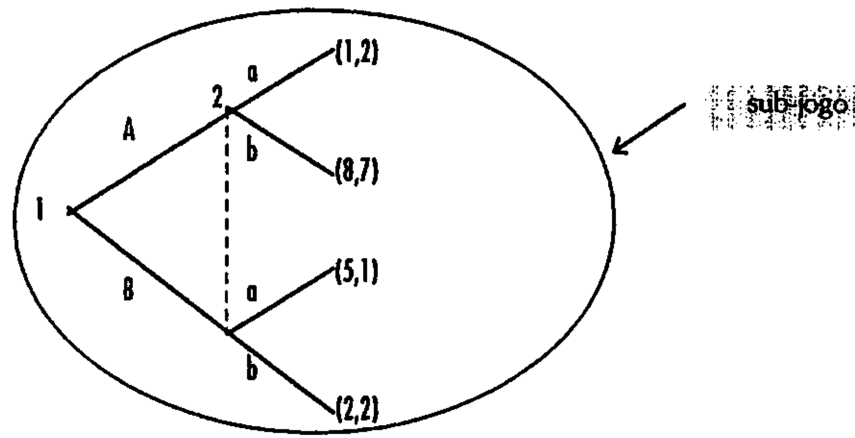
Assumindo os resultados dos sub-jogos 1 e 2, o sub-jogo 3 se resume a:



Assim, A joga x, pois prefere 4 a 3.

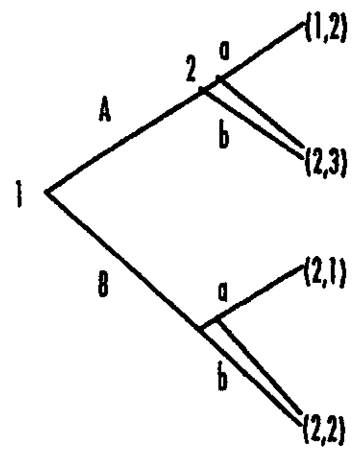
O resultado seria (x,w) em que cada jogador teria um payoff de 4. Este ponto é chamado de Equilíbrio Perfeito em Sub-jogos.

Ex.2:



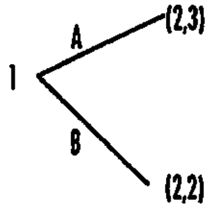
Esse jogo só possui um sub-jogo que é igual ao jogo inteiro (porque tem informação imperfeita), portanto não pode ser resolvido por indução retroativa (poderia ser resolvido por equilíbrio de Nash).

Ex.3: (O traço a mais representa a estratégia que o jogador jogaria se tivesse oportunidade).



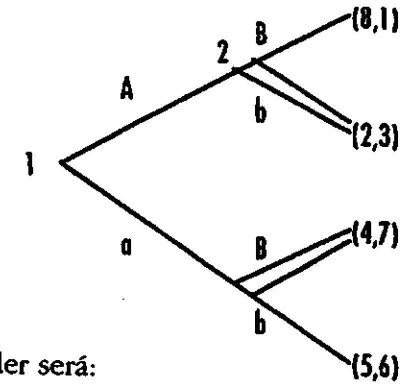
Caso 1 jogue A, 2 joga b.
Caso 1 jogue B, 2 joga b.

Então, para o jogador 1 se resume a:

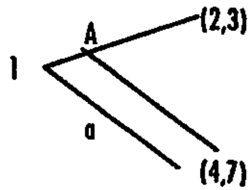


Como ele ganha 2 de qualquer maneira, o jogo pode terminar tanto em (A,b) como em (B,b).

Ex.4:



O jogo para o líder será:



Assim, o equilíbrio Perfeito em Sub-jogos será (a,B), em que o payoff será (4,7).

C.1 MODELO DE STACKELBERG

O modelo de Stackelberg utiliza a noção de indução retroativa para resolver o problema da competição em

oligopólio, em que existe uma firma líder que conhece as curvas de reação das demais firmas e utiliza este conhecimento para seu benefício.

Ex.1:

$p = 50 - 2q_1 - 2q_2$	p = preço
$c_1 = c_2 = 5$	c = custo unitário
$L_1 = p.q_1 - 5q_1$	L = lucro
$L_2 = p.q_2 - 5q_{2b}$	q = quantidade

$$L_2 = 50q_2 - 2q_1q_2 - q^2{}_2 - 5q_2$$

$$\frac{dL_2}{dq_2} = 50 - 2q_1 - 2q_2 - 5 = 0$$

$$2q_2 = 45 - 2q_1$$

$$q_2 = \frac{45 - 2q_1}{2} \quad \leftarrow \quad \text{reação da firma 2}$$

Diferente do modelo de Cournot, a forma 1 conhece a curva de reação da firma 2.

$$L_1 = 50q_1 - 2q^2{}_1 - q_1q_2 - 5q_1 = 45q_1 - 2q^2{}_1 - \frac{45q_1 + 2q^2{}_1}{2}$$

$$\frac{dL_1}{dq_1} = 45 - 4q_1 - 45 + \frac{4q_1}{2} = 0$$

$$90 - 8q_1 - 45 + 4q_1 = 0$$

$$4q_1 = 45$$

$$q_1 = 11{,}25$$

$$q_2 = \frac{45 - 22{,}5}{2} = 11{,}25$$

Ex.2:

$p = 100 - q_1 - q_2$

$c_1 = c_2 = 0$

$L_1 = 100q_1 - q^2{}_1 - q_2q_1$

$L_2 = 100q_2 - q_1q_2 - q^2{}_2$

$\frac{dL_2}{dq_2} = 100 - q_1 - 2q_2 = 0$

$q_2 = \frac{100 - q_1}{2}$

$L_1 = 100q_1 - q^2{}_1 - \frac{100q_1 + q^2{}_1}{2}$

$\frac{dL_1}{dq_1} = 100 - 2q_1 - \frac{100 + 2q_1}{2} = 0$

$200 - 4q_1 - 100 + 2q_1 = 0$

$100 = 2q_1$

$q_1 = 50$

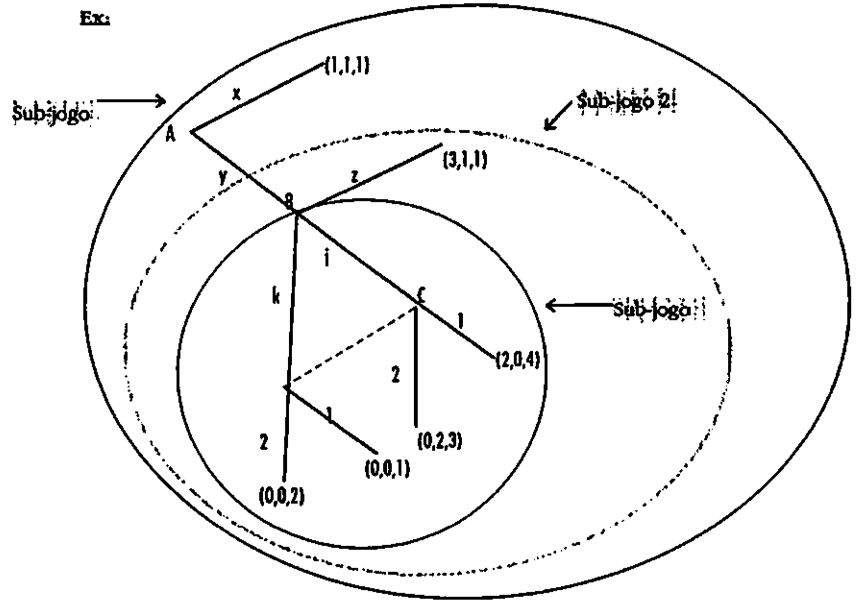
$q_2 = \frac{100 - 50}{2} = 25$

C.2 EQUILÍBRIO DE NASH PERFEITO EM SUB-JOGOS

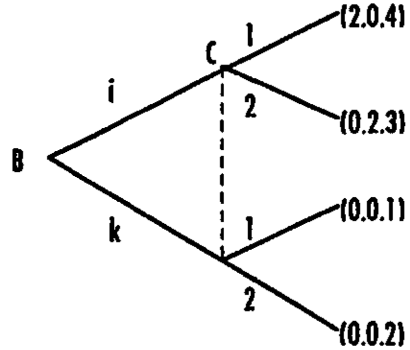
É a utilização conjunta da noção de indução retroativa e de Equilíbrio de Nash para resolver jogos de informação completa e imperfeita

Aplica-se a noção de Indução Retroativa dividindo-se o jogo em sub-jogos e resolvendo os sub-jogos de informação imperfeita pelo Equilíbrio de Nash.

Ex:



Sub-jogo1:

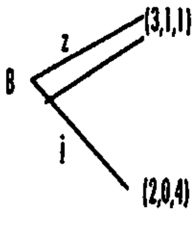


Sub-jogo de informação completa e imperfeita.

		1	2
B	i	2,0,4	0,2,3
	k	0,0,1	0,0,2

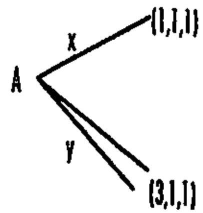
Equilíbrio de Nash (i,1)

Sub-jogo 2:



B prefere 1 a 0.

Sub-jogo 3:



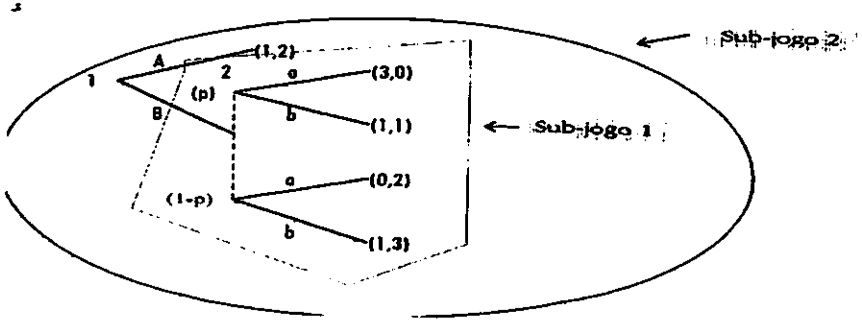
A prefere 3 a 1.

O equilíbrio de Nash Perfeito em Sub-jogos será: (3,1,1). Onde A joga y, B joga z e C não joga.

C.3 EQUILÍBRIO DE BAYES-NASH PERFEITO EM SUB-JOGOS.

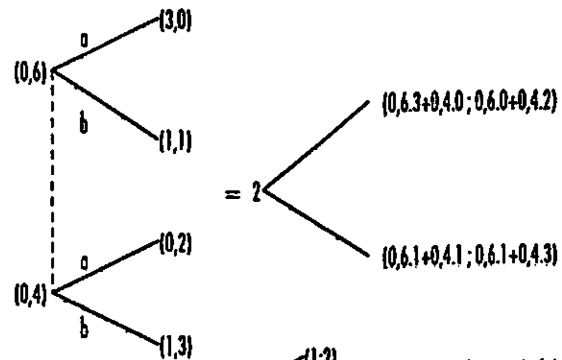
Acrescenta ao Equilíbrio de Nash Perfeito em Sub-jogos a utilização de probabilidade.

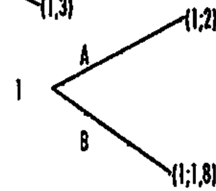
Ex.1:



Se 1 joga B, 2 tem probabilidade p de estar no jogo de cima e 1-p de estar no jogo de baixo. Supondo p=0,6.

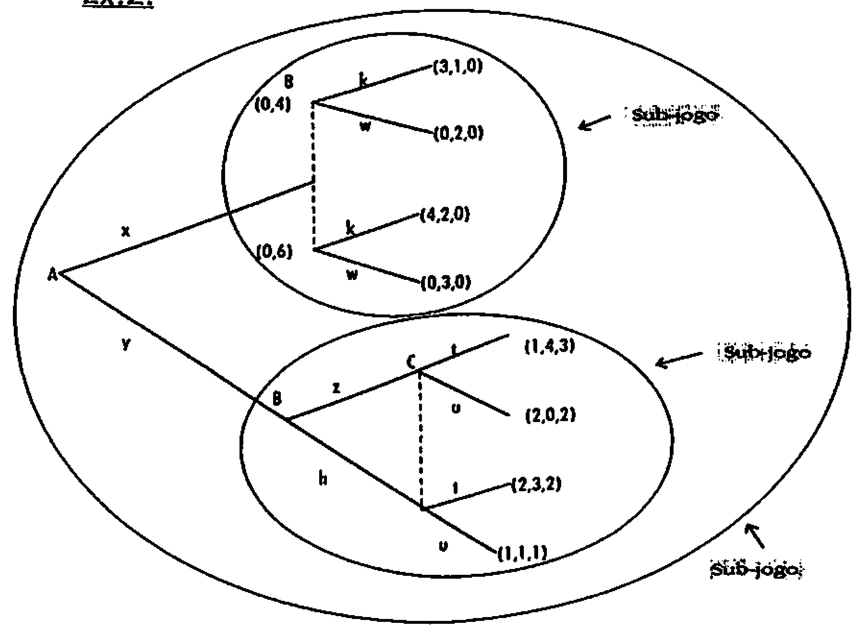
Sub-jogo 1:



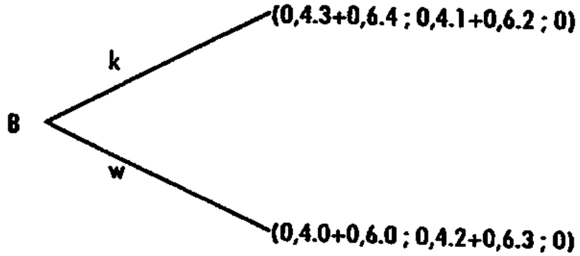


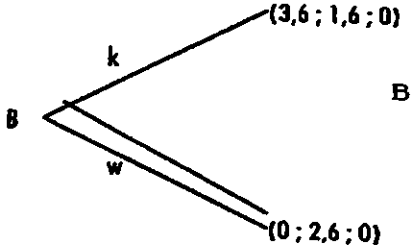
Como 1 é indiferente entre dois payoffs iguais, o jogo possui dois Equilíbrios de Bayes-Nash Perfeitos em Sub-jogos: (1;2) e (1;1,8).

Ex.2:



Sub-jogo 1:





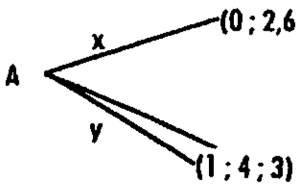
B prefere 2,6 a 1,6.

Sub-jogo 2:

B	C: t	C: u
z	1,4,3	2,0,2
h	2,3,2	1,1,1

Equilíbrio de Nash

Sub-jogo 3:



A prefere 1 a 0.

Assim o payoff (1 ; 4 ; 3) representa o Equilíbrio de Bayes-Nash Perfeito em Sub-jogos. Quando A joga y, B joga z e C joga t.

D. ESTRATÉGIAS MISTAS

Alguns jogos não podem ser resolvidos pelas técnicas até agora apresentadas, como por exemplo:

1 \ 2	C	D
A	10,-5	-5,10
B	-5,10	10,-5

Se supusermos que os jogadores podem jogar x% em uma opção e o resto na outra, pode ser que exista uma solução para este jogo. Este tipo de estratégia é chamada de estratégia mista e o percentual que cada jogador jogará em cada opção dependerá da propensão ao risco de cada jogador.

Supondo que os jogadores fossem avessos ao risco, no exemplo acima, o jogador 1 jogaria 50% em A e 50% em B, enquanto o jogador 2 jogaria 50% em C e 50% em D. Assim, cada jogador teria um payoff de 0,5.10+0,5.(-5) =2,5 independente da jogada do outro jogador e, portanto, não haveria risco.

Neste tipo de jogo, em que cada jogador pode distribuir sua aposta entre as diferentes opções, há diferença em relação aos jogos analisados até agora (jogos de estratégia pura - em que cada jogador só pode escolher uma estratégia).

Ex.: suponha que duas pessoas (1 e 2) jogam um jogo de cara ou coroa, em que cada jogador pode distribuir sua aposta entre cara ou coroa; o jogador 1 escolhe primeiro e a moeda tem 70% de probabilidade de dar cara e 30% de dar coroa. Suponha que o jogador 1 tem 100 reais para apostar e maximiza a seguinte função de utilidade:

$$U = 0{,}7x.\ 0{,}3y$$

$x =$ valor que aposta em cara

$y =$ valor que aposta em coroa

$$U = 0{,}7x.0{,}3(100\text{-}x) = 0{,}21x(100\text{-}x) = 21x\text{-}0{,}21x^2$$

$$\frac{dU}{dx} = 0$$

$$21\text{-}0{,}42x = 0$$

$$x = 50 \text{ e } y = 50$$

Suponha agora que o jogador 2 tem também 100 reais e sua função de utilidade é dada por:

$$U = (0{,}7x)^2 + (0{,}3y)^2$$

Como a função é côncava e o jogador está maximizando:

$$x = 100 \text{ e } y = 0$$

3. JOGOS REPETIDOS

Supondo que exista um jogo do tipo:

		Firma 2: C	Firma 2: R
Firma 1	C	L/2,L/2	0,L
	R	L,0	Lc,Lc

Onde: L = lucro de monopólio

Lc = lucro de Cournot

C = cooperar

R = renegar

As duas firmas fazem um acordo de restringir a oferta e receber, cada uma, o lucro de monopólio dividido por dois (que é maior que o lucro de Cournot). Caso uma das firmas renegue, a outra passa a renegar a partir do próximo período.

Sendo d a probabilidade do jogo continuar:

Uma firma irá cooperar enquanto o payoff esperado por cooperar [P(C)] for maior que o payoff esperado por Renegar [P(R)]. Onde:

$$P(C) = L/2 + dL/2 + d^2L/2 + \ldots = (L/2)/(1\text{-}d)$$

$$P(R) = L + dLc + d^2Lc + \ldots = L + dLc/(1\text{-}d)$$

Assim, quando existe a probabilidade de o jogo se repetir, pode acontecer um resultado diferente do que seria obtido se o jogo fosse jogado apenas uma vez.

Caso este jogo fosse jogado apenas uma vez e fosse resolvido por qualquer um dos processos mostrados anteriormente, ambos os jogadores decidiriam renegar.

Então, quando um jogo possui uma probabilidade de continuar, não ocorre necessariamente a mesma solução que ocorreria se o jogo fosse jogado apenas uma vez. Isto se deve ao fato de que o espaço das soluções é muito maior para um jogo repetido.

(Seja a solução de um jogo jogado apenas uma vez a solução primária).

Com um jogo repetido, só é possível haver uma solução diferente da solução primária quando o jogo não tem um fim determinado. Porque, caso haja um fim determinado, na última jogada a solução certamente será a solução primária e, raciocinando de trás para frente (como no conceito de indução retroativa), a solução primária se repete em todas as vezes que ocorre o jogo.

Bibliografia

Varian, Hal R. - Microeconomia Princípios Básicos, Ed. Campus, 1994.

Varian, Hal R. - Microeconomic Analysis (third edition), W.W. Norton & Company, 1992.

Façanha, Luiz Otávio - Uma Introdução à Teoria dos Jogos, mimeo., 1995.

Fudenberg, Drew and Tirole, Jean - Noncooperative Game Theory For Industrial Organization: An Introduction and Overview, Handbook of Industrial Organization, Volume 1, 1989.

Últimos textos publicados

364. GONÇALVES, Reinaldo. The theory of international trade: back to basics. Rio de Janeiro: UFRJ/IEI, 1996. (23 pág.)

363. SICSÚ, João. A Tese da independência do Banco Central e a estabilidade de preços: uma aplicação do método-Cukierman à história do FED. Rio de Janeiro: UFRJ/IEI, 1996. (43 pág.)

362. PAULA, Luiz Fernando Rodrigues de. Comportamento dos Bancos em alta inflação: uma abordagem pós-keynesiana. Rio de Janeiro: UFRJ/IEI, 1996. (46 pág.)

361. FREIRES, Laércio do Prado. Planejamento Estratégico em Organizações Complexas: a Experiência da Indústria Petrolífera. Rio de Janeiro: UFRJ/IEI, 1996 (62 pág.)

360. FAGUNDES, Jorge. Reestruturação da Oferta dos Serviços de Telecomunicações no Plano Internacionais. Rio de Janeiro: UFRJ/IEI, 1996 (70 pág.)

359. SICSÚ, João. A URV e sua função de alinhar preços relativos. Rio de Janeiro: UFRJ/IEI, 1996 (36 pág.)

358. MELO, Luiz Martins de. Inovações e Finanças. Rio de Janeiro: UFRJ/IEI, 1996 (38 pág.)

357. MELO, Luiz Martins de. Sistema Nacional de Inovação (SNI)[1]: Uma Proposta de Abordagem Teórica. Rio de Janeiro: UFRJ/IEI, 1996 (69 pág.)

356. BRITTO, Jorge. Reestruturação Industrial e Reformas Estruturais: uma Avaliação da Experiência Argentina. Rio de Janeiro: UFRJ/IEI, 1996 (50 pág.)

355. BRITTO, Jorge. Cooperação Inter-Industrial e Redes de Sub-Contratação: uma Análise do Modus Operandi das Relações de Parceria. Rio de Janeiro: UFRJ/IEI, 1996 (54 pág.)

354. STUART, Rogério. O retorno dos fluxos de capital privado e o desenvolvimento econômico: questões teóricas face e uma conjuntura internacional adversa. Rio de Janeiro: UFRJ/IEI, 1995. (45 pág.)

353. FAGUNDES, Jorge. As telecomunicações no Brasil: uma agenda para as políticas públicas. Rio de Janeiro: UFRJ/IEI, 1995. (63 pág.)

352. FIORI, José Luís. Social liberalismo: bússola quebrada de Fernando Henrique Cardoso. Rio de Janeiro: UFRJ/IEI, 1995. (23 pág.)

351. FIORI, José Luís. Tulipas, moedas e reformas: Três meses do governo FHC. Inclui os textos: "Que horas são?" e "Em busca do dissenso perdido". Rio de Janeiro: UFRJ/IEI, 1995. (30 pág.)

350. HERMANN, Jennifer. Sistema de pagamentos, indogeneidade da moeda e papel do Banco Central. Rio de Jnaeiro: UFRJ/IEI: 1995 (39 pág.)